mwp-434

tsfilter - 循環成分のフィルタリング　【 評価版 】

`tsfilter` は時系列データ y_t を

$$y_t = \tau_t + c_t$$

のようにトレンド成分 (trend component) τ_t と循環成分 (cyclical component) c_t とに分離します。τ_t は非定常 (nonstationary) なものであっても構いません。すなわち確定的なトレンドや確率的なトレンドを持つことが許容されます。

`tsfilter` の目的とするところは c_t — 確率的なサイクルによって駆動される定常的な循環成分 — を推定することにあります。トレンド成分 τ_t は $\tau_t = y_t - c_t$ として計算されます。

1. Example データセット

時系列データのフィルタリングはトレンド成分や季節性成分といった望ましくない特性を除去するという目的で、あるいは確率的サイクルによって駆動される成分を推定するという目的でよく使用されます。`tsfilter` の中で実装されているフィルタはそのどちらにも対応できますが、主目的とするところは後者にあります。そのためここでの議論は後者の用途に限定することにします。

▷ Example 1: **トレンドを含む時系列**

使用する Example データセットは `ipq.dta` で、米国における鉱工業生産指数 (index of the industrial production) のデータが四半期ごとに記録されています。

```
. use https://www.stata-press.com/data/r17/ipq.dta
```
[*1]

ここでは鉱工業生産指数の自然対数値を表す変数 `ip_ln` を対象に分析を行います。

```
. tsline ip_ln
```

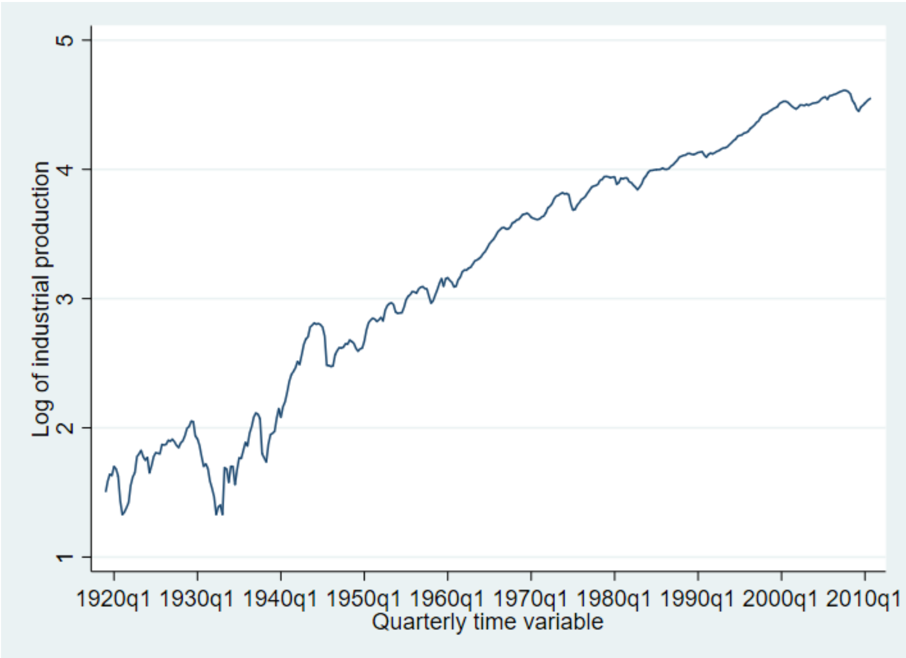


図 1　変数 `ip_ln` の推移

◁

このグラフは `ip_ln` 中にトレンド成分が含まれていることを示しています。それは確定的なものかも知れませんし、確率的なものかも知れません。確定的なトレンドとしては時間の多項式関数が、一方、確率的トレンドとしては和分過程 (integrated process) がよく利用されます。和分過程というのは 1 回、または複数回差分を取ることによって定常的なものとなるランダム変数のことを言います（Hamilton (1994) 参照）。

以下においては `tsfilter` 中に実装されている 4 種類の手法について紹介します。いずれもトレンドを除去した上でビジネスサイクル成分の推定を行います。なお、Burns and Mitchell (1946) はビジネスデータ中に現れる 1.5 年から 8 年周期の振動をビジネスサイクル変動 (business-cycle fluctuations) と定義しているわけですが、この定義が Stata マニュアル中でも踏襲されています。

[*1] メニュー操作：File ▷ Example Datasets ▷ Stata 17 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の tsfilter の項よりダウンロードする。

2. SMA **フィルタ**

対称移動平均 (SMA: symmetric moving-average) フィルタはその性格と単純さから、循環成分の推定において基盤となる手法を構成しています。時系列 $y_t(t \in \{1,\ldots,T\})$ に対する SMA フィルタは $t \in \{q{+}1,\ldots,T{-}q\}$ についての次のようなデータ変換として定義されます。

$$y_t^* = \sum_{j=-q}^{q} \alpha_j y_{t-j}, \qquad \text{ただし}\alpha_{-j} = \alpha_j (j \in \{-q,\ldots,q\})$$

オリジナルの系列は T 個の観測データから構成されているわけですが、フィルタリングされた系列を構成するのは $T-2q$ 個のみのデータとなります。この q は SMA フィルタの次数と呼ばれます。

その和が 0 となるような重みを持った SMA フィルタは次数が 2 以下の確定的/確率的トレンドを除去することができます。詳細については Fuller (1996), Baxter and King (1999) を参照ください。

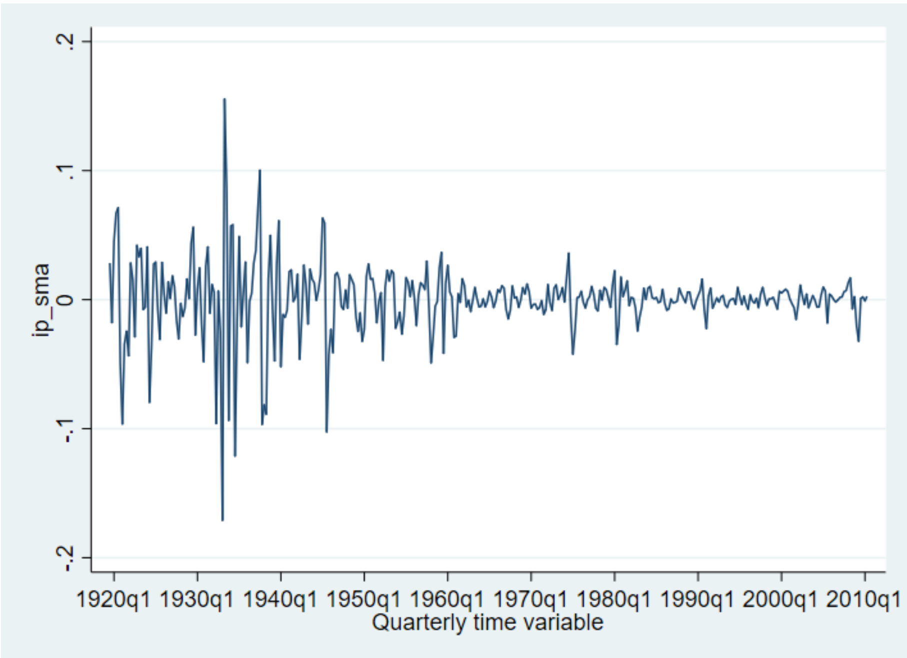
▷ Example 2: SMA **フィルタによるトレンドの除去**

ここでは一例として `ip_ln` に対する次のような SMA フィルタを想定した上で、フィルタリング後の系列をプロットしてみます。

$$-0.2\mathtt{ip\_ln}_{t-2} - 0.2\mathtt{ip\_ln}_{t-1} + 0.8\mathtt{ip\_ln}_t - 0.2\mathtt{ip\_ln}_{t+1} - 0.2\mathtt{ip\_ln}_{t+2}$$

この 2 次の SMA フィルタは `tsfilter` を使わずとも構成できます。

```
. generate ip_sma = -0.2*L2.ip_ln-0.2*L.ip_ln+0.8*ip_ln-0.2*F.ip_ln-0.2*F2.ip_ln
(4 missing values generated)
. tsline ip_sma
```



フィルタによってトレンドが除去されていることがわかります。 $\triangleleft$

なぜ上記のような係数値を選択したかについて明解な理由があるわけではありません。Baxter and King (1999) は和が 0 で指定された循環成分のみを可能な限り保持できる係数値を持った一群の SMA フィルタを導出しています。

3. 周波数領域におけるフィルタリングの概要

Baxter and King (1999) が"可能な限りそれに近い"という尺度をどのように定義したかに迫るには、時系列分析に対する周波数領域アプローチ (frequency-domain approach) からの考え方を学ぶ必要があります。以下に示す直観的な説明の裏付けとなる技術的な詳細については Priestley (1981), Hamilton (1994), Fuller (1996), Wei (2006) を参照ください。

多くの時系列分析の場合と同様、基本的な結果は共分散定常過程 (covariance-stationary processes) を対象としたものであるわけですが、一部には非定常なケースを対象とした結果も含まれます。ここでは共分散定常過程に対するいくつかの有用な結果を紹介した後に、非定常な系列の扱いについても見て行くことにします。

共分散定常過程 y_t の自己共分散 (autocovariances) $\gamma_j (j \in \{0, 1, \dots, \infty\})$ はその分散と従属構造 (dependence structure) を規定します。時系列分析に対する周波数領域アプローチにおいては、y_t と自己共分散は周波数 $\omega \in [-\pi, \pi]$ における独立な確率的サイクルによって表現されます。スペクトル密度関数 $f_y(\omega)$ はそれぞれの周波数 ω における確率的サイクルが y_t の分散 — σ_y^2 と表記する — に対してどれだけ寄与しているかを表すものと言えます。このスペクトル密度関数を用いると分散と自己共分散は次のように表現されることになります。

$$\gamma_j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} f_y(\omega) d\omega \tag{1}$$

ただし i は虚数単位を意味します。

評価版では割愛しています。

4. Baxter-King **フィルタ**

評価版では割愛しています。

$\triangleright$ Example 3: BK **フィルタによる推定**

評価版では割愛しています。

5. Christiano-Fitzgerald フィルタ

評価版では割愛しています。

▷ Example 4: CF **フィルタによる推定**

評価版では割愛しています。

6. Hodrick-Prescott フィルタ

評価版では割愛しています。

▷ Example 5: HP **フィルタによる推定**

評価版では割愛しています。

▷ Example 6: **パラメータ** λ **の選択**

評価版では割愛しています。

7. Butterworth フィルタ

評価版では割愛しています。

▷ Example 7: **低周波数成分の除去**

評価版では割愛しています。

▷ Example 8: **高周波数成分の除去**

評価版では割愛しています。

▷ Example 9: **次数の選択**

評価版では割愛しています。

▷ Example 10: CF **フィルタとの対比**

■