

## var - ベクトル自己回帰モデル 【 評価版 】

Stata にはベクトル自己回帰 (VAR: vector autoregressive) モデルに関連したコマンドが一式用意されています。本 whitepaper ではその中核となる var コマンドについて、その機能概要と用例を紹介します。なお、VAR としての機能は制限されますが、簡便な操作で IRF や FEVD をも含む形で分析が行える varbasic というコマンドが別に用意されています。これについては [TS] varbasic (mwp-005) をご参照ください。

- |                |           |
|----------------|-----------|
| 1. VAR モデル     |           |
| 2. var の用例     | Example 1 |
|                | Example 2 |
|                | Example 3 |
| 3. var 関連推定後機能 |           |

## 1. VAR モデル

VAR の一般的なモデル式を記すと次のようになります。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{B}_0 \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_s \mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{u}_t \quad t \in \{-\infty, \infty\} \quad (1)$$

ただし  $\mathbf{u}_t$  はホワイトノイズ、すなわち

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_t) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') &= \Sigma \\ E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_s') &= \mathbf{0} \quad \text{for } t \neq s \end{aligned}$$

であるとして、とは言えベクトル式では少々わかりにくいかも知れないので、外生変数  $\mathbf{x}_t$  を含まない 3 変量 VAR(2) モデル (すなわち  $p = 2$ ) という簡単なケースについて、参考までに成分表記のモデル式を記しておきます。

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{3,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{ただし } \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \sim \text{W.N.}(\Sigma)$$

擾乱項  $u_t$  はホワイトノイズ (W.N.) ですが、その分散共分散行列が対角行列ではなく、一般的な  $\Sigma$  と表記されている点に注意してください。(2) 式の例で言えば

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ただし } \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

であるわけです。従って 3 変量 VAR(2) モデルの場合、推定対象となるパラメータの数は  $v_j$  が 3 個、 $a_{ij}^{(1)}$  が 9 個、 $a_{ij}^{(2)}$  が 9 個、 $\sigma_{ij}$  が 6 個で計 27 個となります。

(2) 式の例に示されるような VAR モデルの各方程式は誤差項の相関を通じて関係しています。このようなモデルは見かけ上無関係な回帰 (SUR: seemingly unrelated regression) モデルと呼ばれます。一般的に SUR モデルに対して有効な推定を行うためには、誤差項の相関を考慮する必要があるため、すべての回帰式を同時に推定しなくてはなりません。しかし VAR モデルの場合にはすべての回帰式が同一の説明変数を持つという特殊性が備わっています。この条件のもとでは、各方程式に対し個別に OLS を適用することによって得られる係数の推定値が最良線形不偏推定量 (BLUE: best linear unbiased estimator) となることが知られています。さらに擾乱項  $u_t$  が多変量正規分布に従う場合には、各方程式を個別に OLS によって推定した係数値は最尤推定量とも一致することになります。

## 2. var の用例

### ▷ Example 1: 基本的なモデル

[TS] var の Example 1 には基本的な VAR モデルの用例が紹介されています。使用するのは Example データセット lutkepohl2.dta です。

```
. use http://www.stata-press.com/data/r17/lutkepohl2.dta *1
```

(Quarterly SA West German macro data, Bil DM, from Lutkepohl 1993 Table E.1)

ここで設定するのは (2) 式で表現される 3 変量 VAR(2) モデルであるわけですが、 $y_1, y_2, y_3$  には次の 3 つの時系列変数をそれぞれ対応させることにします。

変数名	内容	備考
dln_inv	$\Delta \ln(inv)$	inv: 投資
dln_inc	$\Delta \ln(inc)$	inc: 所得
dln_consump	$\Delta \ln(consump)$	consump: 消費

参考までに変数 inv について関係するデータを一部リストしておきます。

\*1 メニュー操作: File ▷ Example Datasets ▷ Stata 17 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の var の項よりダウンロードする。

```
. list qtr inv ln_inv dln_inv in 1/8, separator(4) *2
```

	qtr	inv	ln_inv	dln_inv
1.	1960q1	180	5.192957	.
2.	1960q2	179	5.187386	-.0055709
3.	1960q3	185	5.220356	.03297
4.	1960q4	192	5.257495	.0371394
5.	1961q1	211	5.351858	.0943627
6.	1961q2	202	5.308268	-.0435905
7.	1961q3	207	5.332719	.0244513
8.	1961q4	214	5.365976	.033257

データセット上には 1960q1 から 1982q4 までのデータが記録されていますが、ここでは 1978q4 までの範囲に限定する形でフィットを行います。

var コマンドを実行するに際してはラグ次数を指定する必要があるわけですが、本用例ではデフォルトの設定を用いることにします。このためフィットされるモデルは VAR(2) ということになります。なお、推定実行前に varsoc コマンドを使用して適切なラグ次数を選択することもできますが、それについては [TS] varsoc (*mwp-057*) をご参照ください。

- Statistics ▷ Multivariate time series ▷ Vector autoregression (VAR) と操作
- Model タブ: Dependent variables: dln\_inv dln\_inc dln\_consump  
Lags: Include lags 1 to: 2 (デフォルト)

\*2 メニュー操作 : Data ▷ Describe data ▷ List data

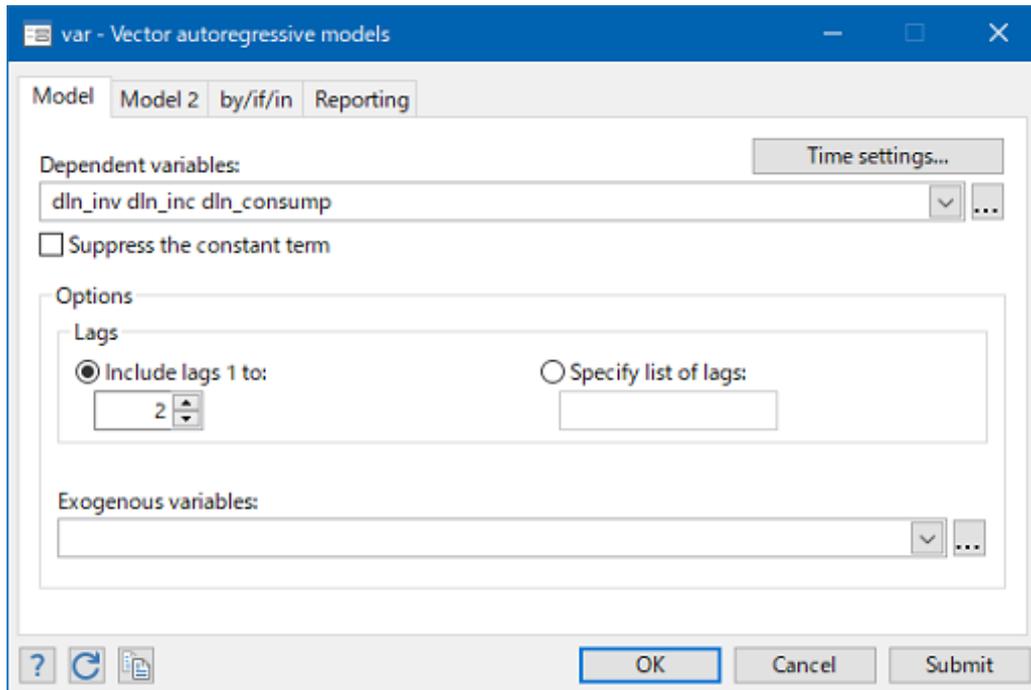


図1 var ダイアログ – Model タブ

- by/if/in タブ: lf: qtr <= tq(1978q4)

```
. var dln_inv dln_inc dln_consump if qtr <= tq(1978q4)
```

Vector autoregression

Sample: 1960q4 thru 1978q4                      Number of obs     =            73  
Log likelihood =    606.307                      AIC                 =       -16.03581  
FPE               =    2.18e-11                    HQIC                =       -15.77323  
Det(Sigma\_ml)   =    1.23e-11                    SBIC                =       -15.37691

Equation	Parms	RMSE	R-sq	chi2	P>chi2
dln_inv	7	.046148	0.1286	10.76961	0.0958
dln_inc	7	.011719	0.1142	9.410683	0.1518
dln_consump	7	.009445	0.2513	24.50031	0.0004

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
<b>dln_inv</b>						
dln_inv						
L1.	-.3196318	.1192898	-2.68	0.007	-.5534355	-.0858282
L2.	-.1605508	.118767	-1.35	0.176	-.39333	.0722283
<b>dln_inc</b>						
L1.	.1459851	.5188451	0.28	0.778	-.8709326	1.162903
L2.	.1146009	.508295	0.23	0.822	-.881639	1.110841
<b>dln_consump</b>						
L1.	.9612288	.6316557	1.52	0.128	-.2767936	2.199251
L2.	.9344001	.6324034	1.48	0.140	-.3050877	2.173888
_cons	-.0167221	.0163796	-1.02	0.307	-.0488257	.0153814
<b>dln_inc</b>						
dln_inv						
L1.	.0439309	.0302933	1.45	0.147	-.0154427	.1033046
L2.	.0500302	.0301605	1.66	0.097	-.0090833	.1091437
dln_inc						
L1.	-.1527311	.131759	-1.16	0.246	-.4109741	.1055118
L2.	.0191634	.1290799	0.15	0.882	-.2338285	.2721552
dln_consump						
L1.	.2884992	.1604069	1.80	0.072	-.0258926	.6028909
L2.	-.0102	.1605968	-0.06	0.949	-.3249639	.3045639
_cons	.0157672	.0041596	3.79	0.000	.0076146	.0239198
<b>dln_consump</b>						
dln_inv						
L1.	-.002423	.0244142	-0.10	0.921	-.050274	.045428
L2.	.0338806	.0243072	1.39	0.163	-.0137607	.0815219
dln_inc						
L1.	.2248134	.1061884	2.12	0.034	.0166879	.4329389
L2.	.3549135	.1040292	3.41	0.001	.1510199	.558807
dln_consump						
L1.	-.2639695	.1292766	-2.04	0.041	-.517347	-.010592
L2.	-.0222264	.1294296	-0.17	0.864	-.2759039	.231451
_cons	.0129258	.0033523	3.86	0.000	.0063554	.0194962



[TS] var の Example 1 では Lütkepohl (2005) との整合性を確保するため lutstats と dfk というオプションが指定されていますが、ここでは省略しました。

モデル式 (2) との対応で言えば次のようなパラメータ値が推定されたこととなります。

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.320 & 0.146 & 0.961 \\ 0.044 & -0.153 & 0.288 \\ -0.002 & 0.225 & -0.264 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.161 & 0.115 & 0.934 \\ 0.050 & 0.019 & -0.010 \\ 0.034 & 0.355 & -0.022 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.017 \\ 0.016 \\ 0.013 \end{pmatrix}$$

なお、これらの点推定値以外にそれぞれに対する  $p$  値についても注意を払う必要があります。例えば `dln_inv` に関する方程式について言えば有意なのは  $a_{11}^{(1)}$  のみであり、残る  $a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(1)}, a_{12}^{(2)}, a_{13}^{(1)}, a_{13}^{(2)}, v_1$  については 0 である可能性を否定できないからです。制約を課した状態での VAR のフィットについては Example 3 を参照してください。

一方、 $\Sigma$  の推定値については `e(Sigma)` という形でアクセスすることが可能です。

```
. matrix list e(Sigma) *3
```

```
. matrix list e(Sigma)
symmetric e(Sigma)[3,3]
      dln_inv      dln_inc      dln_consump
dln_inv      .00192542
dln_inc      .00006475      .00012417
dln_consump  .00011142      .00005557      .00008065
```

◁

\*3 推定コマンドからの出力内容は `ereturn list` とコマンド入力することによって確認できます。

▷ Example 2: 外生変数を含むモデル

評価版では割愛しています。

▷ Example 3: 制約の付加

評価版では割愛しています。

3. var 関連推定後機能

評価版では割愛しています。

