mwp-207

var intro - VAR モデルの概要 【 評価版 】

Stata には VAR モデルに関連したコマンドが一式用意されていますが、本 whitepaper では VAR モデルに関係する基本的概念、事項について情報を整理しておきます。

1. VAR モデル

K 変量の VAR(p) モデルの一般式は次のように表現されます。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{B}_0\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_s\mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{u}_t \qquad t \in \{-\infty, \infty\} \tag{1}$$

ただし

$\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \ldots y_{Kt})'$ は $K \times 1$ ベクトル
$\mathbf{A}_1$ から $\mathbf{A}_p$ はパラメータを表す $K \times K$ 行列
$\mathbf{x}_t$ は外生変数を表す $M \times 1$ ベクトル
$\mathbf{B}_0$ から $\mathbf{B}_s$ は $K \times M$ の係数行列
$\mathbf{v}$ はパラメータを表す $K \times 1$ ベクトル
$\mathbf{u}_t$ はホワイトノイズ、すなわち

$$E(\mathbf{u}_t) = \mathbf{0},$$
$$E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \mathbf{\Sigma},$$
$$E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_s') = \mathbf{0} \quad \text{for } t \neq s$$

であるとします。

モデル式 (1) 中には $K^2 \times p + K \times (M(s+1)+1)$ 個のパラメータが、また共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ 中には $\{K \times (K+1)\}/2$ 個のパラメータが存在します。推定対象のパラメータ数を減らす 1 つの方法は $\mathbf{A}$ 行列や $\mathbf{B}$ 行列の一部を $\mathbf{0}$ とする方法です。この他、係数に対し線形の制約を課す方法もあります。

VAR は動的な同時方程式 (dynamic simultaneous equations) の誘導型 (reduced form) ととらえることもできます。今、次のような系が与えられたとします。

$$\mathbf{W}_0\mathbf{y}_t = \mathbf{a} + \mathbf{W}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{W}_p\mathbf{y}_{t-p} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\mathbf{x}_t + \widetilde{\mathbf{W}}_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \widetilde{\mathbf{W}}_s\mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{e}_t \tag{2}$$

ただし $\mathbf{a}$ は $K \times 1$ ベクトル、$\mathbf{W}_i (i = 0, \ldots, p)$ は $K \times K$ 行列、$\mathbf{e}_t$ は攪乱を表す $K \times 1$ ベクトルとします。同時方程式に対する伝統的なアプローチにおいては $\mathbf{W}_i$ に対し十分な数の制約を課し、識別性 (identification) が確保できるようにします。今、$\mathbf{W}_0$ が非特異 (nonsingular) 行列であるとすると (2) 式は次のように書き直せます。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t =& \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{W}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{W}_p\mathbf{y}_{t-p} \\ &+ \mathbf{W}_0^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}_0\mathbf{x}_t + \mathbf{W}_0^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{W}_0^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}_s\mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{e}_t \end{aligned} \tag{3}$$

このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{a} \\ \mathbf{A}_i &= \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{W}_i \\ \mathbf{B}_i &= \mathbf{W}_0^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}_i \\ \mathbf{u}_t &= \mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{e}_t \end{aligned}$$

という置換えを行うことにより (1) 式が誘導されます。

方程式をまたがった分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ には同時点相関 (contemporaneous correlations) に関するすべての情報が含まれているわけですが、それは VAR の最大の強みであると同時に最大の弱点でもあります。すなわち何ら怪しげな制約条件を課することなく、データセットに含まれる情報のみで VAR のフィットが行えるというのは VAR の強みと言えます。しかし $\mathbf{\Sigma}$ の構造に何らかの制約を課さない限り、因果関係という視点での結果の分析が行えないという弱点があります。

いくつかの前提条件を設けるなら、(1) 式で表される VAR に対する別の表現形式が導かれます。今、VAR が安定 (stable) であるとするなら（`[TS]` **varstable** (*mwp-058*) 参照)、(1) 式における $\mathbf{y}_t$ は

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{D}_i\mathbf{x}_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{u}_{t-i} \tag{4}$$

のように表現できます。ただし $\boldsymbol{\mu}$ は時間的に不変の平均値を表す $K \times 1$ ベクトル、$\mathbf{D}_i$ と $\mathbf{\Phi}_i$ はそれぞれパラメータからなる $K \times M, K \times K$ 行列であるとします。(4) 式は $\boldsymbol{\mu}$ の周囲における $\mathbf{y}_t$ の変動過程はパラメータ $\mathbf{D}_i$ と $\mathbf{\Phi}_i$、及び外生変数 $\mathbf{x}_t$ と i.i.d. に従うショック (innovations) $\mathbf{u}_t$ の過去の（無限の）履歴によって完全に規定し得ることを表しています。この (4) 式は VAR の**ベクトル移動平均表現** (vector moving-average representation) 形式として知られています。この式における $\mathbf{D}_i$ は動学乗数関数 (DM: dynamic-multiplier functions) あるいは伝達関数 (transfer functions) と呼ばれます。一方、移動平均係数を意味する $\mathbf{\Phi}_i$ は horizon i における simple IRF としても知られています。$\mathbf{D}_i$ と $\mathbf{\Phi}_i$ の詳細については `[TS]` **irf create** のセクション“*Methods and formulas*”をご参照ください。

評価版では割愛しています。

2. SVAR **モデル**

評価版では割愛しています。

3. **短期的** SVAR **モデル**

評価版では割愛しています。

4. **長期的** SVAR **モデル**

評価版では割愛しています。

5. IRF **と** FEVD

評価版では割愛しています。

■