mwp-003

arima - 自己回帰移動平均モデル　【 評価版 】

`arima` は擾乱が自己回帰移動平均 (ARMA: autoregressive moving-average) 過程として表現される単変量モデルのフィットを行います。`arima` は従属変数の自己回帰項のみによって記述された ARMA モデルのみならず、独立変数を含む形の ARMAX モデルにも対応しています。

1. ARMA 過程

次に示すのは 1 次の ARMA 過程 ARMA$(1,1)$ のモデル式です。

$$y_t = \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta} + \mu_t \tag{1a}$$
$$\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \tag{1b}$$

(1a) 式は構造方程式 (structural equation) と呼ばれます。これに対し (1b) 式は擾乱 (disturbance) の特性を規定する数式です。ただし $\epsilon_t \sim i.i.d.\ N(0,\sigma^2)$、すなわち ϵ_t は白色ノイズ (white-noise) と呼べる擾乱であるとします。

このモデル式の本質は擾乱項 μ_t の中に自己相関 (autoregressive) 項 $\rho\mu_{t-1}$ と移動平均 (moving-average) 項 $\theta\epsilon_{t-1}$ を含む点です。すなわち周期 t における擾乱は単なる白色ノイズ ϵ_t 以外に 1 期前の μ_t, ϵ_t の影響を引きずった構造となっています。その影響の度合いはパラメータ ρ と θ によって規定されるわけです。

ARMA$(1,1)$ のモデル式を ARMA(p,q) に一般化したときの擾乱は

$$\mu_t = \rho_1\mu_{t-1} + \cdots + \rho_p\mu_{t-p} + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

のように記述できるわけですが、これに $\mu_t = y_t - \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta}$ という式を代入すると

$$
\begin{aligned}
y_t =& \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1(y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}\boldsymbol{\beta}) + \rho_2(y_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2}\boldsymbol{\beta}) + \cdots + \rho_p(y_{t-p} - \mathbf{x}_{t-p}\boldsymbol{\beta}) \\
&+ \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q} + \epsilon_t
\end{aligned} \tag{2}
$$

という ARMA(p,q) のモデル式が得られます。これに対しラグ演算子 L を用いた数式を

$$
\boldsymbol{\rho}(L^p) = 1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \cdots - \rho_p L^p \tag{3a}
$$

$$
\boldsymbol{\theta}(L^q) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q \tag{3b}
$$

のように定義すると（ただし $L^j y_t = y_{t-j}$ を意味する）、ARMA(p,q) は

$$
\boldsymbol{\rho}(L^p)(y_t - \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\theta}(L^q)\epsilon_t \tag{4}
$$

という簡単な式で表現できることになります。

ARMA 過程と言った場合、従属変数のみからなる、すなわち独立変数 $\mathbf{x}_t$ を含まないモデルを対象にすることが多いわけですが、ここでは ARMA$(1,1)$ 過程と ARMA$(2,2)$ 過程について具体的なモデル式を誘導しておきます。

(1) ARMA$(1,1)$ モデル

ARMA(p,q) 過程の一般式 (4) より

$$
(1 - \rho_1 L)(y_t - \beta_0) = (1 + \theta_1 L)\epsilon_t
$$

ラグ演算子を適用すると

$$
y_t - \beta_0 - \rho_1(y_{t-1} - \beta_0) = \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1}
$$

従って

$$
y_t - \beta_0 = \rho_1(y_{t-1} - \beta_0) + \theta_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \tag{5}
$$

というのが ARMA$(1,1)$ 過程のモデル式となります。

(2) ARMA$(2,2)$ モデル

同様に ARMA$(2,2)$ 過程のモデル式は

$$
y_t - \beta_0 = \rho_1(y_{t-1} - \beta_0) + \rho_2(y_{t-2} - \beta_0) + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t \tag{6}
$$

となります。

> 用例の中には ARIMA(p,d,q) 過程という表現が出てきます（I は integrated の略）が、それは d 階差分の時系列が ARMA(p,q) 過程に従うことを意味します。

> ARIMA モデルのモデル式に関する補足については補足 2 を参照ください。

2. ARIMA モデル

▷ Example 1: ARIMA(1,1,1) モデル

[TS] **arima** の Example 1 には Example データセット `wpi1.dta` を使用した ARIMA(1, 1, 1) モデルの用例が紹介されています。

```
. use https://www.stata-press.com/data/r18/wpi1.dta
```
[*1]

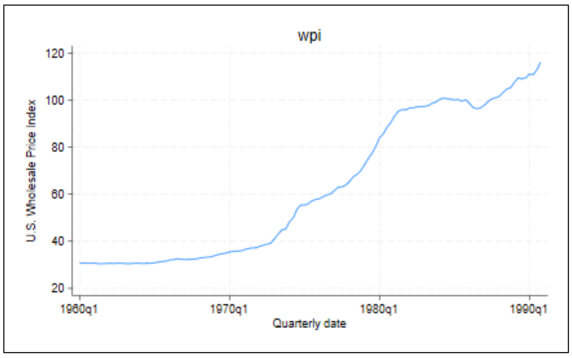
このデータセット中には 1960q1 から 1990q4 に至る期間中のデータが四半期ごとに記録されています。

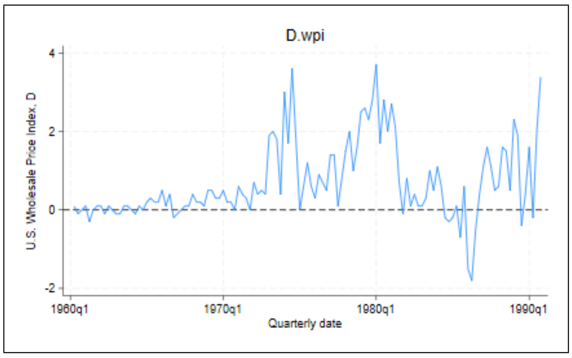
```
. list wpi t if _n <= 4 | _n >= (_N - 3), separator(4)
```
[*2]

	wpi	t
1.	30.7	1960q1
2.	30.8	1960q2
3.	30.7	1960q3
4.	30.7	1960q4
121.	111	1990q1
122.	110.8	1990q2
123.	112.8	1990q3
124.	116.2	1990q4

次に示すのは `wpi` と `D.wpi`（`wpi` の 1 階差分）についてのプロットです。

```
. twoway (line wpi t), title(wpi)
. twoway (line D.wpi t), yline(0) title(D.wpi)
```
[*3]





このグラフから明らかなように原系列 `wpi` は定常とは言えないので、ここでは階差系列 `D.wpi` を解析対象とします。

[*1] メニュー操作：File ▷ Example Datasets ▷ Stata 18 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の arima の項よりダウンロードする。
[*2] メニュー操作： Data ▷ Describe data ▷ List data
[*3] メニュー操作： Graphics ▷ Twoway graph (scatter, line, etc.)　詳細については補足 1 を参照。

ARMA モデルを `arima` に対し指定する場合、`arima(p,d,q)` という略式指定を用いる方法と `ar()`, `ma()` 指定による方法の 2 種類が選択できます。モデルに含めるべきラグ次数が AR 項については 1 から p、MA 項については 1 から q と連続している場合には略式指定を用いることができます。これに対し指定すべきラグ次数が 1 と 4 といった形で不連続な場合には、*numlist* が指定できる `ar()`, `ma()` インタフェースを用いることになります。

なお、`arima(p,d,q)` インタフェースを用いた場合には差分の次数 d を明示することができます。その場合、例えば `arima(1,1,1)` という形でモデルを規定したとするなら、従属変数として指定するのは `D.wpi` ではなく `wpi` となる点に注意してください。

最初に `arima(p,d,q)` インタフェースを用いて `arima` の実行を行ってみます。この場合、従属変数としては `wpi` を指定します。

- Statistics ▷ Time series ▷ ARIMA and ARMAX ▷ ARIMA and ARMAX models と操作
- Model タブ: Dependent variable: `wpi`
  ARIMA(p,d,q) specification: `p = d = q = 1`

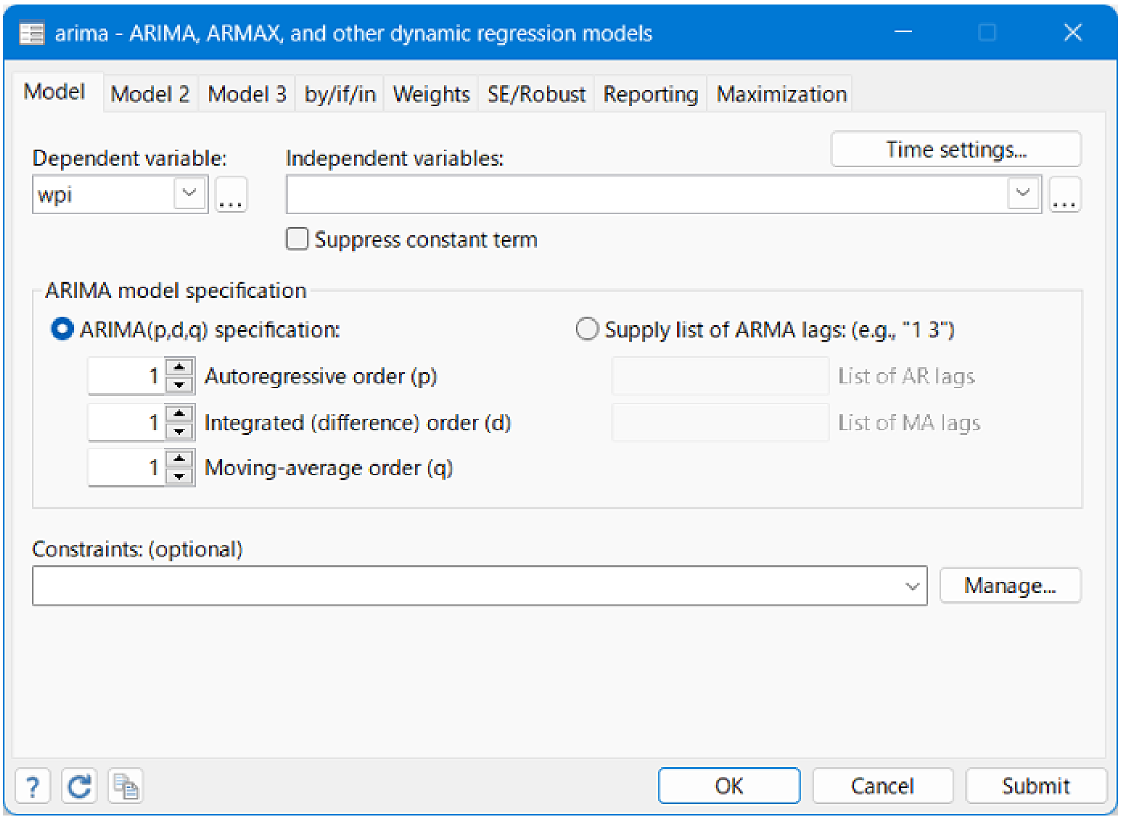


図 1 `arima` ダイアログ – Model タブ

```
. arima wpi, arima(1,1,1)

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:  Log likelihood = -139.80133
Iteration 1:  Log likelihood =  -135.6278
Iteration 2:  Log likelihood = -135.41838
Iteration 3:  Log likelihood = -135.36691
Iteration 4:  Log likelihood = -135.35892
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5:  Log likelihood = -135.35471
Iteration 6:  Log likelihood = -135.35135
Iteration 7:  Log likelihood = -135.35132
Iteration 8:  Log likelihood = -135.35131

ARIMA regression

Sample: 1960q2 thru 1990q4                      Number of obs     =        123
                                                Wald chi2(2)      =     310.64
Log likelihood = -135.3513                      Prob > chi2       =     0.0000

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
       D.wpi | Coefficient  std. err.      z    P>|z|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
wpi          |
       _cons |   .7498197   .3340968     2.24   0.025     .0950019    1.404637
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .8742288   .0545435    16.03   0.000     .7673256     .981132
             |
          ma |
         L1. |  -.4120458   .1000284    -4.12   0.000    -.6080979   -.2159938
-------------+----------------------------------------------------------------
      /sigma |   .7250436   .0368065    19.70   0.000     .6529042    .7971829
------------------------------------------------------------------------------
Note: The test of the variance against zero is one sided, and the two-sided
      confidence interval is truncated at zero.
```

結果が意味するところは (5) 式より次のようになります。

$$\Delta wpi_t - 0.750 = 0.874 \cdot (\Delta wpi_{t-1} - 0.750) - 0.412 \cdot \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

なお `sigma` として 0.725 とレポートされていますがこれはホワイトノイズ攪乱 ϵ の標準偏差推定値を意味します。

評価版では割愛しています。

▷ Example 2: **加法的季節変動モデル**

評価版では割愛しています。

3. 乗法的季節変動モデル

評価版では割愛しています。

4. ARMAX モデル

評価版では割愛しています。

5. 動的予測

評価版では割愛しています。

補足１ – グラフ作成コマンド操作

評価版では割愛しています。

補足２ – ARIMA のモデル式

評価版では割愛しています。

■